Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами*

А. Мальцев (Москва)

Когда идет речь об изоморфном представлении некоторой абстрактно заданной бесконечной группы посредством матриц конечной степени, то естественно возникают два вопроса: 1) возможно ли вообще такое представление и 2) каков способ обозрения всех возможных представлений этой группы. В случае конечных групп представление достаточно высокой степени всегда имеется, и поэтому вопрос о существовании для них отпадает. Наоборот, для бесконечных групп такой вопрос приобретает фундаментальное значение. В настоящей работе мы занимаемся именно этим вопросом.

Основная стоящая здесь проблема может быть сформулирована так: указать в терминах абстрактной теории групп необходимые и достаточные признаки того, чтобы некоторая группа допускала изоморфное представление какой-либо степени над каким-нибудь коммутативным полем. В § 1 эта проблема решается полностью для абелевых групп и групп периодических. Что касается общего случая, то он сначала редуцируется к группам с конечным числом образующих, а затем сводится к проблеме представления конечных групп матрицами заданной степени. Оказывается, что матричные группы с конечным числом образующих могут быть с любой степенью точности аппроксимированы конечными группами, допускающими представления ограниченной степени, и наоборот, из возможности такой аппроксимации уже вытекает представимость группы.

Из результатов, получаемых попутно с перечисленными фактами, отметим следующие. Прежде всего выясняется, что класс p-групп, допускающих изоморфное представление над полем характеристики нуль, в точности совпадает с классом специальных p-групп, недавно изученных С. Н. Черниковым[1].

Далее, подробно выясняются связи, существующие между свойствами представлений группы в целом и свойствами представлений ее подгрупп с конечным числом образующих. Отсюда в качестве частных случаев получаются известные результаты Шура[2] о представлениях периодических групп в полях нулевой характеристики и, сверх того, аналогичные теоремы для представлений перио-

---

* Часть результатов этой работы была доложена на алгебраическом совещании в Москве 14/XI 1939 г.

[1] С. Н. Черников, Бесконечные специальные группы, Матем. сб., **6 (48): 2**, (1939), 199—225.

[2] I. Schur, Über Gruppen periodischer linearer Substitutionen, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., (1911), 619—627.

дических групп в полях простой характеристики. Наконец, в § 6 для групп, допускающих изоморфное матричное представление, решается так называемая проблема Гопфа[3]. Проблема состоит в следующем. Требуется доказать, что группы с конечным числом образующих не могут содержать собственного нормального делителя, факторгруппа по которому была бы изоморфна первоначальной группе. Такое утверждение было пока доказано только для свободных групп Magnus'ом, если не считать тривиальных случаев групп абелевых и конечных. Указанные типы групп заведомо допускают матричное представление и содержатся, следовательно, в нашем решении. Однако, это решение охватывает и ряд существенно новых случаев, например, свободные произведения конечного числа абелевых, свободные произведения конечного числа конечных групп и некоторые другие[4].

§ 1. Абелевы и периодические группы

Простейшим случаем общей проблемы о представлениях бесконечных групп является вопрос о существовании изоморфных представлений абелевых групп. Чтобы иметь возможность формулировать его решение, напомним несколько определений. Пусть $\mathfrak{A}$ — абелева группа и p — некоторое простое число. Совокупность всех элементов группы $\mathfrak{A}$, порядок которых есть степень p, называется примарной компонентой, или p-компонентой группы $\mathfrak{A}$.

Абелева группа называется квазициклической, если всякое конечное множество ее элементов порождает циклическую подгруппу.

Теорема 1. *Для того, чтобы абелева группа $\mathfrak{A}$ могла быть изоморфно представлена матрицами степени n над некоторым полем характеристики нуль, необходимо и достаточно, чтобы каждая ее примарная компонента была прямым произведением не более n квазициклических групп. Далее, чтобы абелева группа могла быть представлена матрицами степени n над некоторым полем простой характеристики p, необходимо и достаточно, чтобы ее p-компонента разлагалась в прямое произведение циклических групп порядка $\leqslant p^s$, а все остальные примарные компоненты были прямыми произведениями не более $n-s$ квазициклических групп.*

Доказательство. Докажем сначала первую половину теоремы, в которой речь идет о представлениях в полях нулевой характеристики. Необходимые и достаточные условия, сформулированные в этой части, эквивалентны требованию, чтобы уравнение $x^m=1$ в группе $\mathfrak{A}$ имело не более m^n решений. Необходимость такого условия может быть обнаружена следующим путем. Пусть $\mathfrak{D}$ — изоморфное представление группы $\mathfrak{A}$ в поле $\mathfrak{K}$, которое мы можем предполагать алгебраически замкнутым. Обозначим через $\mathfrak{H}$ периодическую часть группы $\mathfrak{A}$. По теореме Шура представление $\mathfrak{D}$ эквивалентно такому $\mathfrak{D}_1$, в котором все матрицы $\mathfrak{H}$ имеют диагональный вид. Возьмем какой-нибудь элемент h из группы $\mathfrak{H}$ и рассмотрим его матрицу H в новом представлении. Если $h^m=1$,

---

[3] Magnus, Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring, Math. Ann., **111**, (1935), 276.

[4] В только что появившейся работе Д. И. Фукса-Рабиновича [D. I. Fouxe-Rabinovitch, On the determinator of an operator of the free group, Матем. сб., **7 (49)**: **1**, (1940), 197] содержится случай свободного произведения абелевых групп.

то диагональные элементы матрицы H являются значениями радикала $\sqrt[m]{1}$ в поле $\mathfrak{K}$. Так как последний радикал имеет только m значений, а степень матрицы H есть n, то различных матриц, обладающих указанными свойствами, найдется не более m^n, что и доказывает необходимость условий.

Для доказательства достаточности мы прежде всего построим вспомогательную трансфинитную цепочку

$$\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_\omega \subset \mathfrak{A}_{\omega+1} \subset \ldots$$

подгрупп группы $\mathfrak{A}$, обладающую следующими свойствами:

1. $\mathfrak{A}_0$ совпадает с единицей группы $\mathfrak{A}$.

2. Если α — предельное, то $\mathfrak{A}_\alpha = \sum\limits_{\lambda<\alpha} \mathfrak{A}_\lambda$. Если же $\alpha = \beta + 1$, то $\mathfrak{A}_\alpha = [\mathfrak{A}_\beta, a_\alpha]$, где либо никакая положительная степень элемента a_α не принадлежит $\mathfrak{A}_\beta$, либо $a_\alpha^p \in \mathfrak{A}_\beta$ и p — простое. Символ $[\mathfrak{A}_\beta, a_\alpha]$ означает группу, порожденную элементами, стоящими в скобках.

3. $\sum\limits_\alpha \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}$.

Представления групп $\mathfrak{A}_\alpha$ мы будем искать в форме диагональных матриц и так, чтобы представление каждой следующей подгруппы было продолжением представления предшествующей. Построение индуктивно. Возьмем произвольное поле и обозначим его через $\mathfrak{K}_0$. Единственному элементу группы $\mathfrak{A}_0$ поставим в соответствие единичную матрицу E степени n из поля $\mathfrak{K}_0$. Предположим теперь, что для $\lambda < \alpha$ поля $\mathfrak{K}_\lambda$ и представления групп $\mathfrak{A}_\lambda$ уже построены. Если α — число предельное, то полагаем $\mathfrak{K}_\alpha = \sum\limits_{\lambda<\alpha} \mathfrak{K}_\lambda$, а представления групп $\mathfrak{A}_\lambda$ дают и представление группы $\mathfrak{A}_\alpha$. Если α — изолированное, то $\alpha = \beta + 1$. По предположению, группа $\mathfrak{A}_\beta$ уже представлена диагональными матрицами из поля $\mathfrak{K}_\beta$.

В силу свойства (2) имеем $\mathfrak{A}_\alpha = [\mathfrak{A}_\beta, a_\alpha]$. Рассмотрим сначала случай, когда никакая положительная степень a_α не входит в $\mathfrak{A}_\beta$. Положим $\mathfrak{K}_\alpha = \mathfrak{K}_\beta(x)$ и $\|a_\alpha\| = xE$, где x — какой-нибудь элемент, трансцендентный относительно $\mathfrak{K}_\beta$. Таким образом, мы имеем представление элемента a_α и группы $\mathfrak{A}_\beta$. Это представление очевидным способом распространяется на всю группу $\mathfrak{A}_\alpha$, что нам и требовалось. Пусть теперь $a_\alpha^p = b$, $b \in \mathfrak{A}_\beta$ и p — простое. Элементу b в представлении группы $\mathfrak{A}_\beta$ соответствует диагональная матрица $\|b\|$. Присоединим к $\mathfrak{K}_\beta$ корни p-й степени из всех элементов матрицы $\|b\|$ и обозначим новое поле через $\mathfrak{K}_\alpha$. В кольце матриц с элементами из $\mathfrak{K}_\alpha$ имеется в точности p^n диагональных матриц X, удовлетворяющих условию $X^p = \|b\|$. Все эти матрицы не могут быть образами элементов из $\mathfrak{A}_\beta$. Действительно, если $\|x\|^p = \|b\|$, то $x^p = b$. Однако, последнее уравнение имеет в группе $\mathfrak{A}$, согласно предположению, не более p^n решений, одно из которых — a_α в группе $\mathfrak{A}_\beta$ не содержится. Поэтому среди матриц X найдется такая, которая не является образом ни одного элемента $\mathfrak{A}_\beta$. Эту матрицу мы и поставим в соответствие элементу a_α. Всякий элемент c из $\mathfrak{A}_\alpha$ может быть записан в форме

$$c = a_\alpha^k a \quad (a \in \mathfrak{A}_\beta,\ 0 \leqslant k < p).$$

Положим $\|c\| = \|a_\alpha\|^k \|a\|$. Ясно, что это отображение является точным представлением группы $\mathfrak{A}_\alpha$. Таким образом, мы построили представления всех групп $\mathfrak{A}_\alpha$, а значит, и группы $\mathfrak{A}$, которую можно рассматривать как последнюю среди $\mathfrak{A}_\alpha$. Очевидно, что использованные в доказательстве трансцендентные присоединения можно заменить присоединениями элементов, никакая степень которых не содержится в мультипликативной системе, образованной предшествующими элементами. В частности, если группа $\mathfrak{A}$ имеет мощность не выше континуальной, то все элементы матриц можно взять среди комплексных чисел единичной окружности и получить таким образом представление с ограниченными элементами. Справедливость второй части теоремы может быть обнаружена аналогичным путем.

Только что доказанное предложение позволяет легко строить примеры непредставимых групп. Например, прямое произведение бесконечного числа циклических групп данного порядка k не может быть представлено изоморфно матрицами, так как содержит бесконечно много элементов порядка k. Счетная симметрическая группа $\mathfrak{S}_\omega$ также непредставима, так как содержит подгруппу, являющуюся прямым произведением счетного числа циклических второго порядка и т. п.

Теперь мы перейдем к изучению периодических групп, т. е. групп, все элементы которых имеют конечный порядок. Интересующий нас вопрос о возможности точных представлений получает здесь такое решение.

Теорема II. *Для того, чтобы периодическая группа $\mathfrak{G}$ могла быть изоморфно представлена матрицами над некоторым полем нулевой характеристики, необходимо и достаточно, чтобы она имела представимый абелев нормальный делитель конечного индекса.*

Необходимость этих условий была доказана еще Шуром [2], а достаточность непосредственно вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Если некоторая группа $\mathfrak{G}$ имеет подгруппу $\mathfrak{H}$ конечного индекса, которая допускает изоморфное представление матрицами, то сама группа $\mathfrak{G}$ также допускает изоморфное матричное представление над тем же полем.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D}$ — некоторое представление подгруппы $\mathfrak{H}$ и m — ее индекс. Каждому элементу $h \in \mathfrak{H}$ в представлении $\mathfrak{D}$ соответствует определенная матрица, которую мы обозначим через $\bar{h}$. Разложим $\mathfrak{G}$ в смежные классы по $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}g_2 + \cdots + \mathfrak{H}g_m.$$

Произведение $g_i g$, где g — произвольный элемент из $\mathfrak{G}$, можно единственным образом записать в виде $h_i g_{n_i}$ $(h_i \in \mathfrak{H})$. Таким образом, каждому элементу g соответствует последовательность элементов $h_1, \ldots, h_m$ из $\mathfrak{H}$ и последовательность чисел $n_1, n_2, \ldots, n_m$. Последовательности $\{n_i\}$ поставим в соответствие вспомогательную матрицу $D(n_i)$, определяющуюся следующим образом:

$$D(n_i) = \|d_{jk}\| \quad (j, k = 1, 2, \ldots, m), \qquad d_{jn_j} = E,$$
$$d_{jk} = 0, \text{ если } k \neq n_j$$

и E — единичная матрица в представлении $\mathfrak{D}$. Нам нужно каждому элементу

$g \in \mathfrak{G}$ поставить в соответствие некоторую матрицу; в качестве нее мы выберем следующую:

$$\| g \| = \begin{pmatrix} \bar{h}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{h}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & \dots & \bar{h}_m \end{pmatrix} D(n_i).$$

Ясно, что при таком соответствии разным элементам группы $\mathfrak{G}$ отвечают разные матрицы. Последующие вычисления покажут, что это соответствие есть изоморфизм. Пусть a, b — какая-нибудь пара элементов из $\mathfrak{G}$ и пусть

$$g_i a = a_i g_{u_i}, \quad g_i b = b_i g_{v_i} \quad (a_i, b_i \in \mathfrak{H}, \ i = 1, 2, \dots, m).$$

Тогда $h_i ab = a_i b_{u_i} g_{v_{u_i}}$, и, следовательно,

$$\| ab \| = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \bar{b}_{u_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{a}_m \bar{b}_{u_m} \end{pmatrix} D(v_{u_i}).$$

Так как $D(v_{u_i}) = D(u_i) D(v_i)$, то матрицу $\| ab \|$ можно переписать в следующем виде:

$$\| ab \| = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{a}_m \end{pmatrix} D(u_i) D^{-1}(u_i) \begin{pmatrix} \bar{b}_{u_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{b}_{u_m} \end{pmatrix} D(u_i) D(v_i).$$

Отсюда получается

$$\| ab \| = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{a}_m \end{pmatrix} D(u_i) \begin{pmatrix} \bar{b}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{b}_m \end{pmatrix} D(v_i).$$

Следовательно, $\| ab \| = \| a \| \cdot \| b \|$, изоморфизм установлен, лемма доказана, а вместе с нею и теорема II.

В качестве одного из следствий этой теоремы отметим такое: *всякая бесконечная специальная группа допускает изоморфное представление матрицами.* Действительно, общая специальная группа разлагается в прямое произведение конечного числа специальных p-групп. Каждая специальная p-группа имеет абелев нормальный делитель конечного индекса. Этот нормальный делитель будет изоморфно представим, так как является прямым произведением конечного числа групп типа p_∞, которые представимы уже матрицами 1-й степени. В силу теоремы II отсюда следует, что специальные p-группы представимы, а значит, представимы и произвольные специальные группы.

Обратное, вообще, неверно, так как существуют периодические группы матриц, которые не являются специальными. Однако, *всякая p-группа, допускающая изоморфное представление матрицами, будет специальной.* В самом деле, пусть $\mathfrak{P}$ есть p-группа, представимая матрицами. Тогда она имеет абелев нормальный делитель $\mathfrak{A}$ конечного индекса. Совокупность элементов, имеющих бесконечную высоту в $\mathfrak{A}$, обозначим $\mathfrak{B}$. Вследствие представимости группа $\mathfrak{B}$ будет прямым произведением конечного числа групп типа p_∞, а факторгруппа $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ распадется в прямое произведение конечного числа конечных сомножителей.

Таким образом, группа $\mathfrak{B}$ будет нормальным делителем конечного индекса группы $\mathfrak{G}$, что и требовалось доказать.

Теорема II дает полный ответ на вопрос — какие периодические группы изоморфно представимы матрицами над полями нулевой характеристики. Аналогичный вопрос для полей простой характеристики остается открытым. Из приведенных рассуждений вытекает только, что условия, сформулированные в теореме II, будут достаточными и для полей произвольной характеристики.

§ 2. Поведение центра

Вопрос о существовании центра и его свойствах представляет, обычно, большой интерес. Группы, допускающие точное представление матрицами, ведут себя в этом отношении специфическим образом.

Теорема III. *Если группа $\mathfrak{G}$ допускает изоморфное представление $\mathfrak{D}$ и содержит возрастающую цепочку подгрупп $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \ldots$, для каждой из которых представление $\mathfrak{D}$ будет вполне приводимым, то между центрами этих подгрупп, начиная с некоторой из них, будут существовать соотношения*

$$\mathfrak{Z}_k \subset \mathfrak{Z}_{k+1} \subset \ldots$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D}_n^{(1)}, \mathfrak{D}_n^{(2)}, \ldots, \mathfrak{D}_n^{(k_n)}$ — неприводимые представления, на которые распадается $\mathfrak{D}$ для подгруппы $\mathfrak{G}_n$. Возьмем одну из предшествующих групп $\mathfrak{G}_m$ $(m < n)$. Представления $\mathfrak{D}_n^{(i)}$ будут одновременно представлениями группы $\mathfrak{G}_m$. Если хотя бы одно из $\mathfrak{D}_n^{(i)}$ распадается при переходе к $\mathfrak{G}_m$, то мы скажем, что представление $\mathfrak{D}$ распадается при переходе от $\mathfrak{G}_n$ к $\mathfrak{G}_m$. Обозначим теперь через $\mathfrak{G}_{n_1}$ первую из подгрупп, для которых $\mathfrak{D}$ распадается при переходе к $\mathfrak{G}_1$. Аналогично, через $\mathfrak{G}_{n_2}$ обозначим первую из следующих групп, для которых $\mathfrak{D}$ распадается при переходе к $\mathfrak{G}_{n_1}$ и т. д. Если степень представления $\mathfrak{D}$ есть n, то цепочка $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_{n_1}, \ldots$ не может содержать более n подгрупп. Пусть $\mathfrak{G}_{n_s}$ — последняя группа этой цепочки. Если теперь взять подгруппы $\mathfrak{G}_i$ и $\mathfrak{G}_j$, где $n_s < i < j$, то все неприводимые представления группы $\mathfrak{G}_j$, содержащиеся в $\mathfrak{D}$, будут неприводимыми и для $\mathfrak{G}_i$. Отсюда, как известно, следует, что центр подгруппы $\mathfrak{G}_i$ содержится в центре группы $\mathfrak{G}_j$, что и требовалось доказать.

Условия полной приводимости будут заведомо выполнены, если полем представления является поле комплексных чисел и само представление — с ограниченными элементами или если, например, группы $\mathfrak{G}_i$ конечны. В частности, из теоремы III непосредственно получается предложение Черникова: *всякая специальная p-группа имеет нетривиальный центр.* Действительно, специальные группы представимы матрицами, счетны и локально конечны. Поэтому всякую специальную p-группу можно представить как сумму возрастающей цепочки своих конечных подгрупп. Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2 + \ldots$ — такое представление. Все $\mathfrak{G}_i$ являются конечными p-группами и поэтому имеют нетривиальные центры. По упомянутой теореме для некоторого k будем иметь $\mathfrak{Z}_k \subset \mathfrak{Z}_{k+1} \subset \ldots$ Отсюда вытекает, что центр $\mathfrak{Z}$ группы $\mathfrak{G}$ будет иметь разложение $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 + \ldots$ и, следовательно, будет нетривиальным.

§ 3. Локальные и общие представления

Пусть дана некоторая группа $\mathfrak{G}$. Локальной частью $\mathfrak{G}$ мы будем называть всякую ее подгруппу, порождающуюся конечным числом элементов. Многие проблемы теории групп относятся к выяснению связей между свойствами локальных частей и свойствами самой группы в целом. В настоящем параграфе мы рассмотрим связи, существующие между свойствами какого-нибудь представления группы и свойствами этого представления для всех локальных частей $\mathfrak{G}$.

Основным средством будет служить излагаемая ниже лемма. Пусть x_1, $x_2, \ldots$ — некоторое множество переменных и $F_i(x_\alpha, \ldots, x_\gamma)$ — целочисленные полиномы от этих переменных. Систему S, состоящую из некоторого (вообще бесконечного) числа условий вида $F_i(x_\alpha, \ldots, x_\gamma) = 0$ или $\Pi F_i(x_\alpha, \ldots, x_\gamma) \neq 0$ *, мы будем называть **с о в м е с т н о й**, или существует такое поле $\mathfrak{K}$, в котором для переменных x_i можно найти значения, удовлетворяющие системе S.

Л е м м а 2. *Если всякая конечная часть смешанной системы равенств и неравенств совместна, то совместна и вся система.*

Доказательство проводится индуктивно по мощностям системы S. Пусть лемма уже доказана для всех систем, содержащих меньше $\aleph_\sigma$ условий, и S — система, имеющая мощность $\aleph_\sigma$. Расположим все равенства и неравенства системы S в трансфинитную последовательность наименьшего типа Ω_σ и обозначим через S_α начальный отрезок этой последовательности типа α. Все целочисленные полиномы от $x_1, x_2, \ldots$, не приводимые в кольце $C[x_1, x_2, \ldots]$ образуют, очевидно, множество мощности $\aleph_\sigma$ и поэтому могут быть расположены в трансфинитную цепочку типа Ω_σ. Пусть эта цепочка будет $P_1, P_2, \ldots$ Из цепочки $\{P\}$ мы теперь хотим выделить некоторую подпоследовательность $P_{n_1}, P_{n_2}, \ldots$ Мощность любого отрезка S_α $(\alpha < \Omega_\sigma)$ меньше $\aleph_\sigma$, поэтому найдется некоторое поле $\mathfrak{K}_\alpha$, в котором система условий S_α будет разрешима. Значениями переменных x_i в поле $\mathfrak{K}_\alpha$ мы будем называть какое-нибудь решение системы S_α в этом поле. Обозначим через P_{n_1} первый из полиномов последовательности $\{P_\lambda\}$, который обращается в нуль в $\aleph_\sigma$ полях последовательности $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ Дальше рассуждаем индуктивно. Предположим, что нами уже выбраны полиномы P_{n_β} для всех $\beta < \tau$ и так, что каждая из составных систем $\{S_\alpha; P_{n_1} = 0, \ldots, P_\beta = 0, \ldots\}$ $(\beta < \tau)$ совместна. Если τ число изолированное, то $\tau = \varkappa + 1$ и наше предположение означает, что для каждого $\alpha < \Omega_\sigma$ существует некоторое поле $\mathfrak{K}_{\tau\alpha}$, в котором система $\{S_\alpha; P_{n_1} = 0, \ldots, P_{n_\varkappa}\}$ разрешима. В этом случае мы через P_{n_τ} обозначим первый из полиномов последовательности $\{P_\lambda\}$, который отличен от всех уже выбранных P_{n_β} и который обращается в нуль в $\aleph_\sigma$ полях последовательности $\mathfrak{K}_{\tau 1}, \mathfrak{K}_{\tau 2}, \ldots$ Пусть теперь τ — предельное. Система $S_{\tau\alpha}$, состоящая из S_α и всех равенств $P_{n_1} = 0, \ldots, P_{n_\beta} = 0, \ldots$ $(\beta < \tau)$, имеет мощность, меньшую $\aleph_\sigma$, и любая ее конечная часть совместна, так как содержится в одной из совместных частичных систем $\{S_\alpha; P_{n_1} = 0, \ldots, P_{n_\beta} = 0\}$. В силу основного индуктивного предположения мы к системе $S_{\tau\alpha}$ можем применить доказываемую лемму и заключить, что эта

* Знак $\Pi F n_i \neq 0$ здесь означает логическую дизъюнкцию, т. е. утверждение „или $F_{n_1} \neq 0$ или $\ldots$ или $F_{n_k} \neq 0$“.

система совместна. Далее, как в первом случае, через $\mathfrak{K}_{\tau\alpha}$ можно обозначить поле, в котором система $S_{\tau\alpha}$ разрешима и в качестве P_{n_τ} взять первый из полиномов последовательности $\{P_\lambda\}$, отличный от всех P_{n_β} и обращающийся в нуль в $\aleph_\sigma$ полях $\mathfrak{K}_{\tau\alpha}$ $(\alpha=1,\ 2,\ldots)$. Таким образом, цепочка полиномов $\{P_{n_\beta}\}$ определена. Полиномы P_{n_β} в кольце $C[x_1, x_2, \ldots]$ порождают некоторый идеал I. Докажем, что этот идеал является простым. Пусть F — какой-либо полином из I, $F=P_aP_b\ldots P_c$ — его разложение на простые сомножители и $F=A_\alpha P_{n_\alpha}+\ldots$ $\ldots+A_\gamma P_{n_\gamma}$ — выражение F через базис идеала. Выберем некоторое трансфинитное число θ, большее чем $\max[a,\ldots,c;\ n_\alpha,\ \ldots,\ n_\gamma]$. Во всех полях $\mathfrak{K}_{\theta 1}$, $\mathfrak{K}_{\theta 2}, \ldots$ полиномы $P_{n_\alpha}, \ldots, P_{n_\gamma}$, а значит, и F, равны нулю. Отсюда следует, что в каждом поле равен нулю по крайней мере один из сомножителей P_a, $\ldots, P_c$. Обозначим через P_s тот из них, который обращается в нуль в $\aleph_\delta$ полях $\mathfrak{K}_{\theta\lambda}$ $(\lambda=1,\ 2,\ldots)$. Наконец, легко проверить, что $P_s=P_{n_\tau}$, где τ — порядковый тип последовательности $n_1,\ n_2,\ldots,n_\beta,\ldots$ $(\beta<s)$.

Действительно, системы $S_{\tau\alpha}=\{S_\alpha; P_{n_1}=0,\ \ldots,\ P_{n_\beta}=0,\ \ldots\}$ $(\beta<\tau)$ выполняются в полях $\mathfrak{K}_{\tau\alpha}$ $(\alpha=1,\ 2,\ \ldots)$, а P_s есть полином, который обращается в нуль в $\aleph_\sigma$ полях $\mathfrak{K}_{\tau\alpha}$. Следовательно, либо $s>n_\tau$, что невозможно, либо $s=n_\tau$, что нам и требуется.

Итак, показано, что I — простой идеал. Отсюда заключаем, что кольцо вычетов $C[x_1,\ x_2,\ldots]/I$ делителей нуля не содержит и поэтому может быть заключено в поле отношений $\mathfrak{K}$. Это поле и будет тем, в котором разрешима вся система S. Искомое решение можно выразить формулами $x_i=\bar{x}_i$, если через $\bar{x}_i$ обозначить тот класс кольца вычетов $C[x_1,\ldots]/I$, который содержит x_i.

Как уже было сказано, леммой 2 можно воспользоваться для изучения свойств представлений. Предварительно мы введем несколько вспомогательных понятий. Пусть дана группа $\mathfrak{G}$ и натуральное число n. Каждому элементу g группы $\mathfrak{G}$ мы сопоставим множество из n^2 независимых переменных $x^g_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\ \beta=1,\ldots,n)$. Матрицу $X_g=\|x^g_{\alpha\beta}\|$, составленную из этих переменных, назовем трансцендентной матрицей элемента g. Пусть g, h какие-либо элементы группы $\mathfrak{G}$. Систему, состоящую из равенств

$$x^{gh}_{\alpha\beta}=\sum_{v=1}^{n}x^g_{\alpha v}\,x^h_{v\beta}\qquad(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ldots,n)$$

и неравенств $\prod_{\alpha,\beta}(x^g_{\alpha\beta}-x^h_{\alpha\beta})\neq 0$, если $g\neq h$, мы будем называть смешанной системой условий для пары g, h. Объединяя смешанные условия всевозможных пар элементов группы $\mathfrak{G}$, мы получим смешанную систему условий для самой группы $\mathfrak{G}$. Предположим теперь, что нам дано некоторое изоморфное представление группы $\mathfrak{G}$ и пусть в этом представлении элемент g изображается матрицей $\|a^g_{\alpha\beta}\|$. Тогда ясно, что $x^g_{\alpha\beta}=a^g_{\alpha\beta}$ будет решением смешанной системы условий для группы $\mathfrak{G}$. Обратно, если смешанная система условий группы $\mathfrak{G}$ разрешима в некотором поле и $x^g_{\alpha\beta}=a^g_{\alpha\beta}$ есть это решение, то соответствие $g\to\|a^g_{\alpha\beta}\|$ будет изоморфным представлением группы $\mathfrak{G}$. Если решение $x^g_{\alpha\beta}=a^g_{\alpha\beta}$ будет удовлетворять только равенствам системы, а некоторые из неравенств будут нарушаться, то соответствие $g \longrightarrow \| a^g_{\alpha\beta} \|$ останется еще представлением группы $\mathfrak{G}$, но уже гомоморфным.

Имея в виду эти замечания, весьма просто установить следующее предложение [5].

Теорема IV. *Если всякая локальная часть группы $\mathfrak{G}$ допускает изоморфное представление степени n над некоторым полем, то группа $\mathfrak{G}$ также допускает изоморфное представление степени n.*

Для доказательства рассмотрим смешанную систему условий $S_{\mathfrak{G}}$ для группы $\mathfrak{G}$. Нам нужно обнаружить, что $S_{\mathfrak{G}}$ совместна. Возьмем какую-нибудь конечную часть S' системы $S_{\mathfrak{G}}$. В условиях S' явно содержится только конечное число переменных $x^{g_1}, \ldots, x^{g_k}$. Обозначим через $\mathfrak{H}$ подгруппу группы $\mathfrak{G}$, порождаемую элементами $g_1, \ldots, g_k$. Система условий $S_{\mathfrak{H}}$ заведомо разрешима, так как по условиям теоремы группа $\mathfrak{H}$ допускает изоморфное представление степени n. Система S' является частью $S_{\mathfrak{H}}$ и поэтому также разрешима. Следовательно, любая конечная часть $S_{\mathfrak{G}}$ разрешима, а это, по лемме 2, влечет за собою разрешимость $S_{\mathfrak{G}}$, что и требовалось.

Рассмотрим вопрос о существовании изоморфных представлений некоторой группы в полях различных характеристик. Уже из теоремы I видно, что существуют группы, представимые в полях одной характеристики и не представимые в полях другой характеристики. Из этой же теоремы видно, что для каждой простой характеристики p существует такая группа (например, квазициклическая p-группа), которая не представима в полях характеристики p и представима в полях всех остальных характеристик. Для нулевой характеристики последнее обстоятельство места не имеет. Именно, *если какая-либо группа $\mathfrak{G}$ не допускает точного представления в полях характеристики нуль, то она не допускает точных представлений в полях почти всех простых характеристик (за исключением, быть может, конечного числа их).*

Доказательство можно провести по способу от противного. Пусть $\mathfrak{G}$ допускает изоморфные представления степени n в полях характеристик p_1, $p_2, \ldots$ Нам нужно показать разрешимость групповой смешанной системы $S_{\mathfrak{G}}$ в поле нулевой характеристики. Обозначим через S' какую-либо конечную часть системы $S_{\mathfrak{G}}$. По условию S' разрешима в поле любой из характеристик p_1, $p_2, \ldots$, но тогда из доказательства обычной теоремы Штейница [6] следует, что S' разрешима и в поле характеристики нуль. Применяя лемму 2, мы убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

Возвращаясь к изучению связей между локальными и интегральными свойствами представлений, отметим еще следующую теорему.

Теорема V. *Если некоторое представление группы $\mathfrak{G}$ приводимо для всякой локальной части этой группы, то оно будет приводимым и для всей группы; если представление расщепляется для всех локальных частей, то оно расщепляется и для самой группы.*

---

[5] Частный случай этой теоремы для счетных групп другим методом одновременно был получен В. Л. Нисневичем. Матем. сб., **8** (**50**):**3**, (1940), 395—403.

[6] См., например, Ван-дер-Варден, Современная алгебра, т. I, стр. 95 (Москва, 1934).

Доказательство можно снова построить на лемме 2. Действительно, приводимость представления $g \to \| a^g_{\alpha\beta} \|$ равносильна разрешимости той системы уравнений, которая получится, если приравнять нулю элементы одного из угловых прямоугольников всех матриц $\| x_{\alpha\beta} \| \cdot \| a^g_{\alpha\beta} | \cdot \| x_{\alpha\beta} \|^{-1}$. Всякая конечная часть этой системы уравнений разрешима в силу условий теоремы. Применяя лемму 2, мы убеждаемся в разрешимости всей системы, что нам и требовалось. Аналогично доказывается и вторая часть теоремы.

Из теоремы V, в частности, автоматически вытекает известное предложение Шура, что всякое представление периодической группы в поле характеристики нуль расщепляется на абсолютно неприводимые части. В самом деле, пусть точное представление $\mathfrak{D}$ периодической группы $\mathfrak{G}$ приводимо. Всякая локальная часть $\mathfrak{G}'$ этой группы конечна и представление $\mathfrak{D}$ для $\mathfrak{G}'$ по условию приводимо. По теореме Машке $\mathfrak{D}$ будет расщепляться для $\mathfrak{G}'$, а тогда по теореме V представление $\mathfrak{D}$ будет расщепляться и для $\mathfrak{G}$.

§ 4. Представления групп с конечным числом образующих в полях нулевой характеристики

Результаты предшествующего параграфа показывают, что проблема представления бесконечных групп матрицами в значительной мере сводится к изучению той же проблемы для групп с конечным числом образующих. Последним вопросом мы сейчас и займемся. Прежде всего вместо общей групповой системы условий, использованной в § 3, целесообразно ввести аналогичную систему, связанную с данной системой образующих. Итак, пусть $u_1, u_2, \ldots, u_s$ — некоторая конечная система образующих группы $\mathfrak{G}$. Мы предположим, сверх того, что каждый элемент $\mathfrak{G}$ может быть выражен в виде произведения неотрицательных степеней этих образующих. Рассмотрим множество независимых переменных $x^k_{\alpha\beta}$ $(k = 1, 2, \ldots, s,\ \alpha, \beta = 1, \ldots, n)$. Каждому образующему u_i поставим в соответствие матрицу $X_i = \| x^i_{\alpha\beta} \|$ и введем следующие соотношения: если $R(u_1, \ldots\ldots u_s) = e$ есть одно из соотношений между образующими, то полагаем $R(X_1, \ldots, X_s) - E = 0$. Элементы матрицы, стоящей в этом соотношении слева, суть полиномы от x, равенство нулю которых и дает искомые соотношения. Совокупность всех этих равенств обозначим через $S'_{\mathfrak{G}}$. Присоединим к ней еще неравенства следующего вида: если g, h — два различных элемента из $\mathfrak{G}$ и $g = R_1(u_1, \ldots, u_s)$, $h = R_2(u_1, \ldots, u_s)$ — их выражения через образующие, то полагаем $R_1(X_1, \ldots, X_s) - R_2(X_1, \ldots, X_s) \neq 0$. Совокупную систему всех полученных равенств и неравенств обозначим через $S_{\mathfrak{G}}$. Легко убедиться, что группа $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда допускает изоморфное представление в поле $\mathfrak{K}$, когда ее полная система условий разрешима в этом поле.

Пусть теперь группа $\mathfrak{G}$ с образующими $u_1, \ldots, u_s$ допускает изоморфное представление $u_i \to \| a^i_{\alpha\beta} \|$ степени n над некоторым полем нулевой характеристики. Множество всех полиномов от $x^i_{\alpha\beta}$ с рациональными коэфициентами, обращающихся в нуль в точке $x^i_{\alpha\beta} = a^i_{\alpha\beta}$ $(i = 1, 2, \ldots\ \ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$ является простым идеалом I в кольце полиномов $C[x^i_{\alpha\beta}]$. Поэтому для кольца вычетов $\Gamma[x^i_{\alpha\beta}]/I$ существует поле отношений $\mathfrak{K}$. Соответствие $u_i \to \| \bar{x}^i_{\alpha\beta} \|$ ($\bar{x}$ означает класс вычетов, содержащий x) порождает изоморфное представление группы $\mathfrak{G}$ над полем $\mathfrak{K}$. Но $\mathfrak{K}$ есть конечное расширение поля рациональных чисел и, значит, представляет собою простое алгебраическое расширение некоторого чисто трансцендентного расширения поля рациональных чисел $\mathfrak{K} = \Gamma(x_1, \ldots, x_k; y)$, где $x_1, \ldots, x_k$ — независимые переменные, а y — алгебраическая функция от них.

Поле представления $\mathfrak{K}$ можно заменить еще более простым, если повысить степень представления. Действительно, группа $\mathfrak{G}$ представлена матрицами над полем $\mathfrak{K}$, т. е. представлена элементами некоторой гиперкомплексной системы $\mathfrak{A}$ над полем $\mathfrak{K}$. Само поле $\mathfrak{K}$ можно рассматривать как гиперкомплексную систему некоторого ранга r над чисто трансцендентным полем $\Gamma(x_1, \ldots, x_k)$. Станем теперь и $\mathfrak{A}$ рассматривать как гиперкомплексную систему над $\Gamma(x_1, \ldots, x_k)$. Тогда ее элементы, а значит, и элементы группы $\mathfrak{G}$, можно будет представить матрицами степени nr над $\Gamma(x_1, \ldots, x_k)$, что и дает желаемое упрощение. Отсюда вытекает

Теорема VI. *Если группа $\mathfrak{G}$ с конечным числом образующих допускает точное представление над некоторым полем характеристики нуль, то она допускает изоморфное представление и над некоторым конечным чисто трансцендентным расширением поля рациональных чисел.*

Можно ли итти в этом направлении еще дальше и перейти путем соответственного повышения степени к представлению над полем рациональных чисел, остается неясным.

В дальнейшем нам потребуется понятие предельной группы. Это понятие является небольшой модификацией известного понятия теории непрерывных групп[7] и может быть сформулировано следующим образом.

Определение. *Группа $\mathfrak{G}$ называется предельной для последовательности групп $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$, если существует такая последовательность гомоморфизмов $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_2, \ldots$, при которой каждый неединичный элемент группы $\mathfrak{G}$ имеет неединичный образ во всех гомоморфизмах, начиная с некоторого из них.*

Из этого определения непосредственно ясно, например, что для каждого конечного множества элементов предельной группы можно найти такое число m, что во всех гомоморфизмах $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_m$, $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_{m+1}, \ldots$ эти элементы будут иметь различные образы. Ясно также, что предел последовательности абелевых групп будет абелевой группой, предел последовательности m-ступенных групп будет m-ступенной группой и т. п. Однако для нас сейчас больший интерес представляет следующее предложение:

Группа, являющаяся предельной для последовательности групп, допускающих изоморфные представления n-й степени, сама допускает изоморфное представление степени n.

Доказательство этого предложения вполне аналогично доказательству теоремы VI. Пусть $S_{\mathfrak{G}}$ — смешанная система условий для группы $\mathfrak{G}$, S' — ее некоторая конечная часть и $g_1, g_2, \ldots, g_k$ — элементы, которые явно содержатся в условиях S'. Выбираем такое m, чтобы при гомоморфизме $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_m$ элементы

[7] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы.

$g_1, \ldots, g_k$ имели различные образы. Тогда система S' будет содержаться в смешанной системе условий для группы $\mathfrak{G}_m$. Так как в силу представимости $\mathfrak{G}_m$ последняя система совместна, то совместной будет и система S'. Применяя лемму 2, мы сразу же убеждаемся, что группа $\mathfrak{G}$ представима.

Применение понятия предельной группы к изучению представлений основывается на одном замечании из теории чисел, которое мы для отчетливости сформулируем в виде отдельной леммы.

Лемма 3. *Пусть дана система, состоящая из конечного числа условий вида $f_\alpha(x_1, \ldots, x_k) = 0$ или, соответственно, $f_\alpha(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$, где левые части являются целочисленными полиномами от переменных $x_1, \ldots, x_k$. Если эта система разрешима в каком-нибудь поле характеристики нуль, то она разрешима в бесконечном числе простых полей конечных характеристик.*

Теперь, пользуясь этой леммой, мы сможем доказать следующее утверждение:

Теорема VII. *Пусть группа $\mathfrak{G}$ имеет конечную систему образующих $u_1, \ldots, u_s$ и допускает изоморфное представление степени n над полем характеристики нуль. Тогда она является пределом последовательности конечных групп, допускающих изоморфные представления той же степени в простых полях простой характеристики.*

Доказательство. Из смешанной системы условий данной группы выделим равенства и обозначим их совокупность через S^*. Система S^* содержит, вообще говоря, бесконечное число уравнений с одними и теми же переменными $x^i_{\alpha\beta}$. По теореме Гильберта, из этой системы можно выделить такую конечную часть, следствием которой являются все остальные уравнения. Эту конечную часть мы снова обозначим через S^*. Расположим все элементы группы $\mathfrak{G}$ в последовательность $g_1, g_2, \ldots, g_k, \ldots$ и возьмем ее начальный отрезок $g_1, \ldots, g_k$. Пусть $g_i = R_i(u_1, \ldots, u_s)$ — одно из выражений элемента g_i через образующие. Присоединим к S^* систему неравенств

$$R_i(X_1, \ldots, X_s) - R_j(X_1, \ldots, X_s) \neq 0 \quad (1 \leqslant i < j \leqslant k, \ X_i = \| x^i_{\alpha\beta} \|)$$

и обозначим новую систему через S^{**}. Система S^{**} содержится в смешанной системе условий для группы $\mathfrak{G}$ и поэтому разрешима в поле нулевой характеристики. Применяя лемму 3, мы заключаем, что найдется такое простое поле $\mathfrak{P}$ простой характеристики, в котором система S^{**} будет разрешима. Пусть это решение будет $x^i_{\alpha\beta} = a^i_{\alpha\beta}$ $(a^i_{\alpha\beta} \in \mathfrak{P})$. Система S^{**} содержит все равенства из групповой системы группы $\mathfrak{G}$. Следовательно, соответствие $u_i \to \| a^i_{\alpha\beta} \|$ будет порождать некоторое представление $\mathfrak{D}_k$ группы $\mathfrak{G}$. В этом представлении элементы $g_1, \ldots, g_k$ будут иметь различные образы, так как соответствующие неравенства были включены в систему S^{**}. Представление $\mathfrak{D}_k$ является точным представлением некоторой факторгруппы $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_k$, которую мы обозначим через $\mathfrak{G}_k$. Гомоморфизмы $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_2, \ldots$ удовлетворяют всем условиям определения предела, и, таким образом, группа $\mathfrak{G}$ будет предельной для последовательности $\{\mathfrak{G}_k\}$.

Теорема VII в известном смысле редуцирует проблему представимости для бесконечных групп к аналогичной проблеме для конечных групп, и в этом ее интерес. Примеры бесконечных квазициклических групп и группы всех неособенных матриц над полем рациональных чисел показывают, что предположение конечности числа образующих в теоремах VI и VII является существенным.

§ 5. Представления групп в полях простой характеристики

Для полей простой характеристики предшествующие результаты изменяют свою форму. В частности, вместо теоремы VII появляется такое предложение:

Теорема VIII. *Всякая группа $\mathfrak{G}$ с конечным числом образующих, допускающая изоморфное представление степени n над некоторым полем $\mathfrak{K}$ простой характеристики p, является пределом последовательности групп, каждая из которых допускает изоморфное представление степени n над некоторым конечным полем той же характеристики.*

Доказательство. Пусть $u_1, \ldots, u_s$, S^* и S^{**} означают то же, что и в доказательстве теоремы VII. Обозначим через $\mathfrak{P}$ минимальное алгебраически замкнутое поле характеристики p и рассмотрим алгебраическое многообразие M над полем $\mathfrak{P}$, определяемое системой уравнений S^*. Все неравенства системы S^{**} можно заменить одним вида $f(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$. Если полином $f(x_1, \ldots, x_k)$ обращается в нуль во всех точках многообразия M, то он будет равен нулю на многообразии M при любом основном поле. Однако последнего быть не может, так как в поле представления $\mathfrak{K}$ система S^{**} выполняется. Следовательно, на многообразии M найдется точка, в которой полином f будет отличен от нуля. Другими словами, система разрешима в поле $\mathfrak{P}$. Пусть $x^i_{\alpha\beta} = a^i_{\alpha\beta}$ $(a^i_{\alpha\beta} \in \mathfrak{P})$ будет это решение. Соответствие $u_i \to \| a^i_{\alpha\beta} \|$ будет порождать гомоморфное представление $\mathfrak{D}_k$ группы $\mathfrak{G}$. Поле этого представления порождается элементами $a^i_{\alpha\beta}$, число которых конечно и, значит, является конечным полем характеристики p. Обозначая ядро представления $\mathfrak{D}_k$ через $\mathfrak{N}_k$, мы видим, что нами построен гомоморфизм $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_k$ $(\mathfrak{G}_k = \mathfrak{G}/\mathfrak{N}_k)$, при котором образы элементов $g_1, \ldots, g_k$ различны, а группа $\mathfrak{G}_k$ представлена изоморфно матрицами степени n над конечным полем $\mathfrak{P}_k$. Это показывает, что группа $\mathfrak{G}$ есть предел последовательности $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$

Отметим здесь одно любопытное обстоятельство, непосредственно содержащееся в двух последних теоремах. Именно, из этих теорем вытекает, что *все бесконечные группы, имеющие конечное число образующих и допускающие изоморфное матричное представление, являются составными группами.* Будут ли вообще все бесконечные группы с конечным числом образующих составными, остается, повидимому, до сих пор неизвестным.

Теорема VIII позволяет перенести известные результаты Dickson'а[8] о модулярных представлениях конечных групп на случай бесконечных периодических групп. Предварительно докажем, что *порядок конечной p-группы, имеющей*

---

[8] L. E. Dickson, Modular theory of group-matrices, Trans. Amer. Math. Soc., 8, (1907), 389—398.

данное число s образующих и допускающей изоморфное представление матрицами степени n над каким-нибудь полем характеристики p, не может превосходить некоторого числа $N=N(s, n)$. Действительно, пусть данная группа будет $\mathfrak{G}$, $u_1, \ldots, u_s$ — ее образующие и $\mathfrak{D}$ — какое-либо изоморфное представление этой группы в поле характеристики p. Это представление будет эквивалентно такому, все матрицы которого под главной диагональю имеют нули, а на главной — единицы. Пусть образующие u_i в приведенном представлении изображаются матрицами

$$A_i=\begin{pmatrix} 1 & a_1^i \ldots a_{n-1}^i \\ 0 & 1 \ \ldots b_{n-2}^i \\ \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 \ \ldots 1 \end{pmatrix} \qquad (i=1, 2, \ldots, s).$$

Рассмотрим вспомогательную группу $\mathfrak{H}$, порождающуюся матрицами

$$X_i=\begin{pmatrix} 1 & x_1^i & \ldots & x_{n-1}^i \\ 0 & 1 & \ldots & y_{n-2}^i \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

элементы которых x^i, $y^i, \ldots$ мы будем считать независимыми переменными, присоединенными к простому полю характеристики p. Группа $\mathfrak{G}$ является гомоморфным образом группы $\mathfrak{H}$. Поэтому, если мы докажем, что $\mathfrak{H}$ конечна, то все будет сделано. Возьмем какое-либо произведение положительных степеней матриц X_i. Это будет матрица, относительно элементов которой легко проверить следующее: элементы, стоящие в первом ряду, параллельном главной диагонали, будут линейными функциями переменных, стоящие во втором ряду — полиномами второй степени и т. д. Так как различных полиномов данной степени от данного конечного числа переменных с коэфициентами из конечного поля существует только конечное число, то группа $\mathfrak{H}$ конечна, что и требовалось.

Из этого замечания непосредственно следует такое предложение:

Теорема IX. *Всякая p-группа, допускающая изоморфное представление над каким-либо полем, является локально конечной.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}$ есть p-группа с конечным числом образующих, допускающая изоморфное представление степени n над полем характеристики p. По теореме VIII, группа $\mathfrak{G}$ есть предел последовательности конечных групп с тем же числом образующих и допускающих представление степени n над полем характеристики p. Выше было доказано, что порядки всех групп в этом случае не могут быть больше одного и того же числа N. Значит, все $\mathfrak{G}_i$, начиная с некоторой, будут изоморфны группе $\mathfrak{G}$, которая, следовательно, также будет конечной.

Отсюда, наконец, легко получается и

Теорема X. *Всякое представление степени больше 1 произвольной p-группы в поле характеристики p является приводимым.*

В самом деле, мы можем предположить представление изоморфным. Тогда всякая локальная часть данной группы будет конечна, и представление для этой части по Dickson'у будет приводимым. Отсюда, в силу теоремы V, немедленно получается приводимость и для всей группы.

§ 6. Проблема Гопфа для матричных групп

Абстрактная теория групп содержит большое количество проблем, решение которых в общем виде отсутствует до настоящего времени. Однако некоторые из этих проблем получают решение, если предположить, что группы, о которых идет речь в этих проблемах, допускают изоморфные представления матрицами. Наиболее известный пример такого рода представляет проблема Burnside'а о периодических группах. Решение этой проблемы для групп матриц над полем характеристики нуль было указано самим Burnside'ом[9] и затем Шуром, а для полей характеристики решение дает теорема IX. Другой пример представляет проблема существования бесконечных простых групп с конечным числом образующих, которая для матричных групп (теоремы VII и VIII) решается отрицательно. В настоящем параграфе мы хотим рассмотреть еще одну проблему этого характера, именно проблему Гопфа, которая, как будет показано, снова решается, если ограничиться группами, допускающими изоморфные матричные представления. Решение опирается на следующий своеобразный признак непредставимости для групп с конечным числом образующих.

Теорема XI. *Если группа $\mathfrak{G}$ с конечным числом образующих имеет бесконечную возрастающую цепочку нормальных делителей $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2 \subset \ldots$, то для каждого натурального числа n найдется такое k, что фактор-группы*

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_k, \ \mathfrak{G}/\mathfrak{N}_{k+1}, \ldots$$

уже не будут допускать изоморфных представлений степени n ни при какой характеристике поля представлений.

Доказательство. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_s$ — такая система образующих группы $\mathfrak{G}$, при которой всякий элемент может быть записан в виде произведения положительных степеней этих образующих. Из каждого нормального делителя $\mathfrak{N}_i$ выберем по элементу g_i, не содержащемуся в $\mathfrak{N}_{i-1}$. Пусть

$$g_i = R_i(u_1, \ldots, u_s) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

— выражение g_i через образующие, где R_i означает произведение неотрицательных степеней образующих. Возьмем s матриц $X_1, \ldots, X_s$ степени n, $X_i = \| x^i_{\alpha\beta} \|$. Элементы этих матриц $x^i_{\alpha\beta}$ мы будем рассматривать как независимые переменные. Введем в рассмотрение следующие матрицы:

$$T_i = R_i(X_1, \ldots, X_s) - E.$$

[9] W. Burnside, On criteria for the finiteness of the order of a group of linear substitutions, Proc. Lond. Math. Soc., (2), 3, (1905), 435—440.

Элементами матрицы T_i являются полиномы от $x^i_{\alpha\beta}$. Обозначим множество таких полиномов через M. По теореме Гильберта[10], все полиномы множества M линейно выражаются через конечное число их. Обозначим эти базисные полиномы через $F_1, F_2, \ldots, F_r$. Согласно определению полином F_i есть элемент некоторой матрицы T_{n_i}. Обозначим через k натуральное число, большее чем все $n_1, n_2, \ldots, n_r$.

Докажем теперь, что $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_k$ не может быть изоморфно представлена матрицами степени n. Пусть у нас имеется некоторое представление $\mathfrak{D}$ этой факторгруппы. В силу гомоморфизма $\mathfrak{G} \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{N}_k$ представление $\mathfrak{D}$ будет гомоморфным представлением группы $\mathfrak{G}$. Элементы $u_1, \ldots, u_s$ перейдут в этом представлении в некоторые матрицы $A_1 = \| a^1_{\alpha\beta} \|$, $A_2 = \| a^2_{\alpha\beta} \|$, .., где $a^i_{\alpha\beta}$ — элементы поля представлений. Элемент $a^i_{\alpha\beta}$ мы будем называть значением переменного $x^i_{\alpha\beta}$ в представлении $\mathfrak{D}$. Из соотношений (1), (2) и того, что в $\mathfrak{D}$ все элементы нормального делителя $\mathfrak{N}_k$ переходят в единичную матрицу, следует

$$R_i(A_1, \ldots, A_s) - E = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Таким образом, все полиномы, являющиеся элементами матриц $T_1, \ldots, T_k$, обращаются в нуль в представлении $\mathfrak{D}$ и, значит, в частности, обращаются в нуль полиномы $F_1, \ldots, F_r$.

Однако всякий элемент матрицы T_{k+1} выражается линейно через эти полиномы и поэтому

$$T_{k+1}(\mathfrak{D}) = R_{k+1}(A_1, \ldots, A_s) - E = 0.$$

Сравнивая это равенство с равенством

$$g_{k+1} = R_{k+1}(u_1, \ldots, u_s),$$

мы заключаем, что элемент g_{k+1} в представлении $\mathfrak{D}$ переходит в единицу. Так как g_{k+1} не содержится в $\mathfrak{N}_k$, то выходит, что в группе $\mathfrak{D}/\mathfrak{N}_k$ существует элемент, отличный от единичного, который в представлении $\mathfrak{D}$ переходит в единицу. Следовательно, представление $\mathfrak{D}$ не является изоморфным, что и требовалось доказать.

Как уже было сказано, одной из нерешенных проблем теории групп является так называемая проблема Hopf'а. Эта проблема состоит в следующем: требуется доказать (или опровергнуть), что никакая группа с конечным числом образующих не может быть изоморфна своей истинной факторгруппе. Кроме тривиального случая конечных групп и групп абелевых, эта проблема решена утвердительно для свободных групп и некоторых классов групп с бесконечным числом образующих[4]. Нижеследующая теорема дает решение проблемы Hopf'а для групп, представимых изоморфно матрицами.

Теорема XII. *Если некоторая группа $\mathfrak{G}$ с конечным числом образующих допускает изоморфное представление, то она не может быть изоморфна никакой своей истинной факторгруппе.*

---

[10] См., например, Ван-дер-Варден, Современная алгебра, т. II, стр. 16 (Москва, 1937).

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Обозначим $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ через $\mathfrak{G}_1$. В силу изоморфизма $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}_1$, группа $\mathfrak{G}_1$ имеет нормальный делитель $\mathfrak{H}_1$ такой, что $\mathfrak{G}_1 \cong \mathfrak{G}_1/\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_2$ и т. д. С другой стороны, у нас имеется цепочка гомоморфизмов $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2, \ldots$, которая позволяет ввести составные гомоморфизмы $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_2, \ldots$ Ядра последних гомоморфизмов обозначим через $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots$ Очевидно, эти ядра образуют возрастающую цепочку нормальных делителей группы $\mathfrak{G}$, и в силу теоремы XI для каждого n найдется такое число k, что $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_k$ не будет допускать точного представления матрицами степени n. Так как группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_k$ изоморфны, то $\mathfrak{G}$ также не допускает представления степени n. Но число n произвольное и поэтому группа $\mathfrak{G}$ вообще не допускает изоморфных представлений матрицами.

Сделаем еще несколько замечаний по поводу существования групп с теми свойствами, о которых идет речь в предшествующем. Прежде всего нужно показать, что группы с конечным числом образующих, содержащие возрастающую цепочку нормальных делителей, существуют. Примеры таких групп легко построить непосредственно или извлечь из одной работы Neumann'a. Затем остается еще такой вопрос: существуют ли вообще группы с конечным числом образующих, которые не допускали бы изоморфного представления матрицами какой угодно степени. Мы хотим привести здесь пример такой группы. Пусть $\mathfrak{S}$ есть группа всех подстановок множества всех целых рациональных чисел и $\mathfrak{S}_\omega$ — ее подгруппа, состоящая из тех подстановок, которые перемещают только положительные числа и только в конечном числе. Обозначим через A и B, соответственно, подстановки $(1, 2)$ и $(\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots)$ и через $\mathfrak{G}$ — группу, порожденную этими подстановками.

Так как $B^{-k}AB^{k} = (k, k+1)$, то $\mathfrak{S}_\omega \subset \mathfrak{G}$, т. е. счетная симметрическая группа есть подгруппа группы с двумя образующими. Однако, счетная симметрическая группа, как уже указывалось, точных представлений не допускает. Поэтому не допускает точных представлений и группа $\mathfrak{G}$.

(Поступило в редакцию 16/VI 1940 г.)

On isomorphic matrix representations of infinite groups

A. Malcev (Moscow)

(Résumé)

The main problem of this article may be formulated as follows: to find, in the terms of abstract group theory, the necessary and sufficient conditions of isomorphic representability of a given group by means of matrices with elements of an arbitrary field.

In this article there are given a complete solution of this problem for Abelian and periodic groups. In the general case such a solution is not obtained. But it is possible to reduce the general problem firstly to that concerning groups with